



TITLE:

# イデール類群の1-コホモロジー群 について (代数的整数論研究会報告 集)

AUTHOR(S):

赤川, 安正

---

CITATION:

赤川, 安正. イデール類群の1-コホモロジー群について (代数的整数論研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1968, 41: 36-38

ISSUE DATE:

1968-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107643>

RIGHT:

# イデール類群の 1-コホモロジー群

について

阪大理学部 赤川 安正

- $\mathcal{L} = \{l\}$  : 有限個又は無限個の素数  $l$  の集合
- $\mathcal{C}$  : 次の 3 条件をみたす pro-finite groups のカテゴリー
  - C1)  $\text{Hom}(G, G')$  は位相群  $G$  から  $G'$  への hom. 全体
  - C2)  $G \in \text{obj } \mathcal{C} \implies$  可換 pro- $p$  ( $p \in \mathcal{L}$ )-群  $A$  の  $G$  による群拡大  $\tilde{G}$  (i.e.  $1 \rightarrow A \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$  : exact) をとると,  $\tilde{G} \in \text{obj } \mathcal{C}$ .
  - C3)  $\mathcal{C}$  の中で  $\cdots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1$  をとると常に  $\varprojlim G_n \in \text{obj } \mathcal{C}$

とする. 例えば pro-finite gr., pro-solvable gr., pro- $p$ -

gr. 等を考えればよい. 次に  
(のカテゴリー)

- $\Gamma = \{\gamma\}$  : 固定された index set
- $G_S = \{G_\gamma \mid \gamma \in S\}$  : pro-finite gr.  $G_\gamma$  ( $\in \text{obj } \mathcal{C}$  or not) の集合

とする. 次の3条件をみたす組  $(G, \sigma_P, \iota_S)$  の集合を  $\mathcal{O}(\Gamma, G_S)$  とする

Obj 1)  $G \in \text{Obj } \mathcal{C}$

Obj 2)  $\sigma_P = \{\sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$  は位相群  $G$  の (必ずしも最小ではない) 生成系 i.e.  $G = \langle \sigma_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle$

Obj 3)  $\iota_S = \{\iota_\beta \mid \beta \in S\}, \iota_\beta: G_\beta \rightarrow G$  (hom.)

$\mathcal{O}(\Gamma, G_S)$  は次の様にして半順序集合となる:

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \iff \exists \psi \in \text{Hom}(G, G');$$

$$\text{s.t. } \textcircled{1} \psi(\sigma_\gamma) = \sigma_{\gamma'} \quad (\forall \gamma \in \Gamma) \quad \textcircled{2} \psi \iota_\beta = \iota_{\beta'} \quad (\forall \beta \in S)$$

$$\left. \begin{array}{l} (G, \sigma_P, \iota_S) \geq (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \\ \text{"} \leq \text{"} \end{array} \right\} \text{ が同時に成立つとき,}$$

$$(G, \sigma_P, \iota_S) \sim (G', \sigma_{P'}, \iota_{S'}) \text{ とし, } \mathcal{O}(\Gamma, G_S) / \sim$$

をあらためて  $\mathcal{O}(\Gamma, G_S)$  とおく.

◎ C3) より  $\mathcal{O}(\Gamma, G_S)$  は帰納的集合になる.

よって  $(G, \sigma_P, \iota_S)$  がその極大元であるとき, 「 $G$  の relations は  $G_S$  だけで与えられる」ということにする.

さて,

•  $k$ : 体

•  $k_S = \{k_\beta \mid \beta \in S\}$  は  $k_\beta \supset k$  なる体  $k_\beta$  の集合

•  $A_k$ :  $\prod_S k_\beta \supset A_k \supset (\sum_S k_\beta) \cup k$  なる  $k$ -algebra

- $\bar{k}/k$  : max. C-拡大 (i. e. Galois 群が C に属する Galois 拡大のうち最大のもの)
- $A_{\bar{k}} = A_k \otimes_k \bar{k}$
- $J_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^\times$  :  $A_{\bar{k}}$  の正則元が作る乗法群
- $P_{\bar{k}} : \bar{k} \hookrightarrow A_{\bar{k}}$  における  $\bar{k}^\times$  の image
- $C_{\bar{k}} = J_{\bar{k}} / P_{\bar{k}}$
- $\mathcal{O}_k$  :  $\bar{k}/k$  のガロワ群  $G(\bar{k}/k)$
- $\mathcal{O}_S = \{\mathcal{O}_s \mid s \in S\}$ ,  $\mathcal{O}_s$  は  $k_s$  の max. C-拡大 (又は単に max. Galois 拡大) の Galois 群とする. このとき次の定理が成立つ.

定理  $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$

$\Leftrightarrow \mathcal{O}_k$  の relations は  $\mathcal{O}_S$  だけで与えられる

実際、<sup>代</sup>数体や有限体上の一変数代数関数体の様に、イデール類群が類構造をなすものは  $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$  をみたす. この  $H^1(\mathcal{O}_k, C_{\bar{k}}) = 1$  は Hasse のノルム定理と同値なものであるが (例えば 河田敬義「代数的整数論」共立), 上記定理はこの等式のいま一つの解釈を与えるものといえる.